CARTE POSTALE

POSTKAART

(Côté réservé à l'adresse. — *Zijde voor het adres.*)

(*) NIET BESTELLEN OP ZONDAG

Nom et adresse de l'expéditeur. M ...

Naam en adres van den afzender. * ...

* Indication facultative — *Onverplichte opgave.*

Vicomte de Montessus

8 place de Genevière

Lille (Nord)

France

(*) Cette inscription peut être biffée. — *Dat opschrift mag doorgehaald worden.*

1-II-17

Mon cher confrère,

Mon article sur le théorème de Bernoulli va être imprimé par la ~~revue des~~ Société scientifique de Bruxelles. Je ne pourrai donc vous le communiquer qu'en épreuves d'ici à une quinzaine de jours, ce qui sera fait. Veuillez agréer, mon cher collègue, l'expression de mes sentiments les plus dévoués

Ch J de la Vallée Poussin
38 R. Léopold Louvain

Louvain le 16-2-07

Mon cher collègue,

On trouve dans le tome II du cours d'analyse de Jordan nos 183 et suivants une démonstration rigoureuse du théorème asymptotique de Bernoulli. Elle prouve même que la probabilité tend vers l'unité quand le rapport de l'écart relatif à la racine carrée du nombre d'épreuves tend vers l'infini.

M. Goedseels a donné dans les annales de la société scientifique t XVII p. 8 une démonstration très simple du théorème de Bernoulli.

A mon avis, ces démonstrations ont le tort de s'appuyer sur la formule de Stirling et de faire appel à des moyens analytiques inutiles pour le résultat que l'on obtient.

Je me permets de vous communiquer

(en vous autorisant à en faire tout usage que vous jugerez utile) une démonstration du théorème asymptotique de Bernoulli que je trouve bien plus simple et qui ne suppose aucune connaissance préalable. Vous trouverez ma démonstration sur la feuille jointe à cette lettre.

Enfin M. Mansion est en possession d'un travail manuscrit que je lui ai remis dans la dernière séance de la Société et où j'établis (par des calculs élémentaires mais un peu longs et sans formule de Stirling) le théorème suivant:

Soit P la somme de tous les termes du développement de $(p+q)^\mu$ où l'exposant de p est compris entre les limites

$$(\mu+1)(p-l)-\frac{1}{2}$$

$$(\mu+1)(p+l)-\frac{1}{2}$$

on aura

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau h} e^{-x^2}dx \qquad P < \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\tau'}{h'}} e^{-x^2}dx$$

où l'on a posé

$$\varepsilon = l - \frac{3}{2(\mu+1)pq} \qquad \varepsilon' = l + \frac{3}{2(\mu+1)pq}$$

$$\tau = \varepsilon\sqrt{\frac{\mu+1}{2pq}} \qquad \tau' = \varepsilon'\sqrt{\frac{\mu+1}{2pq}}$$

$$h = \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2pq}} \qquad h' = \sqrt{1-\frac{\varepsilon'}{2pq}}$$

Je ne sais si je saisis bien la question que vous me posez dans votre lettre.

Mais je pense que les démonstrations de ~~[illegible]~~ Jordan, Goedseels et la démonstration manuscrite que je vous adresse sont parfaites au point de vue asymptotique, ce qui justifie la phrase que vous signalez dans mon Mémoire en épreuves.

En ce qui concerne le calcul réel de la probabilité dans un cas déterminé, je crois que le théorème énoncé dans cette lettre est encore le plus satisfaisant.

Veuillez agréer, cher collègue, l'assurance de mes meilleurs sentiments

Ch J de la Vallée Poussin

Démonstration très élémentaire du Théorème de Bernoulli.

Soit
$$(p+q)^{\mu} = \sum_{n=0}^{\mu} \frac{\mu!}{n!(\mu-n)!}\, p^{\mu-n} q^{n}$$

$$p+q=1$$

Désignons le plus grand terme du développement par T_0

$$T_0 = \frac{\mu!}{n!(\mu-n)!}\, p^{\mu-n} q^{n};$$

par $T_1, T_2, \ldots$ les termes suivants.

Comme $\underline{n}$ sera le plus grand entier contenu dans $\mu q - p$; on pourra poser (ε étant une fraction)

$$n = \mu q - p + \varepsilon \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu - n = (\mu+1)p - \varepsilon \\ n+1 = (\mu+1)q + \varepsilon \end{array} \right.$$

Il vient alors

$$T_1 = T_0 \frac{\mu-n}{n+1}\frac{q}{p} = T_0 \frac{(\mu+1)p-\varepsilon}{(\mu+1)q+\varepsilon}\frac{q}{p} = T_0 \frac{1-\frac{\varepsilon}{(\mu+1)p}}{1+\frac{\varepsilon}{(\mu+1)q}} < \frac{T_0}{1+\frac{\varepsilon}{(\mu+1)pq}}$$

$$T_2 = T_1 \frac{\mu-n-1}{n+1+1}\frac{q}{p} = T_1 \frac{1-\frac{\varepsilon+1}{(\mu+1)p}}{1+\frac{\varepsilon+1}{(\mu+1)q}} < \frac{T_1}{1+\frac{\varepsilon+1}{(\mu+1)pq}}$$

. . . .

$$T_{\lambda+1} = T_\lambda \frac{\mu-n-\lambda}{n+1+\lambda}\frac{q}{p} = T_\lambda \frac{1-\frac{\varepsilon+\lambda}{(\mu+1)p}}{1+\frac{\varepsilon+\lambda}{(\mu+1)q}} < \frac{T_\lambda}{1+\frac{\varepsilon+\lambda}{(\mu+1)pq}}$$

En multipliant ces inégalités membre à membre ; il vient, a fortiori (en négligeant ε),

$$\frac{T_{\lambda+1}}{T_0} < \prod_{x=1}^{\lambda} \frac{1}{1+\frac{x}{(\mu+1)pq}}$$

et, ce qui est la même chose

$$\frac{T_{\lambda+1}}{T_0} < \prod_{x=1}^{\lambda} \frac{1}{1+\frac{\lambda+1-x}{(\mu+1)pq}}$$

Multiplions ces deux inégalités membre à membre facteur par facteur et extrayons la racine carrée. Comme on a

$$\left(1+\frac{x}{(\mu+1)pq}\right)\left(1+\frac{\lambda+1-x}{(\mu+1)pq}\right) > 1+\frac{\lambda+1}{(\mu+1)pq},$$

il vient a fortiori (T_0 étant < 1)

$$T_{\lambda+1} < T_0\left(1+\frac{\lambda+1}{(\mu+1)pq}\right)^{-\frac{\lambda}{2}} < \left(1+\frac{\lambda}{(\mu+1)pq}\right)^{-\frac{\lambda}{2}}$$

Cette inégalité est symétrique en p et q. On en conclut que tout terme à une distance supérieure à λ du terme principal est moindre que

$$\left(1+\frac{\lambda}{(\mu+1)pq}\right)^{-\frac{\lambda}{2}}$$

Donc la somme de tous ces termes (dont le nombre est $< \mu$) est moindre que

$$\frac{\mu}{\left(1+\frac{\lambda}{(\mu+1)pq}\right)^{\frac{\lambda}{2}}}$$

Soit l un nombre fixe aussi petit qu'on veut. Prenons λ supérieur à $l(\mu+1)$ la somme précédente sera plus petite que

$$\frac{\mu}{\left[\left(1+\frac{l}{pq}\right)^{\frac{l}{2}}\right]^{\mu+1}}$$

quand μ croît indéfiniment le dénominateur croît comme une exponentielle et est infiniment grand par rapport à μ, le quotient tend vers 0. La somme de tous les termes de $(p+q)^{\mu}$ étant un, on en conclut que la somme des termes à une distance moindre que $l(\mu+1)$ du terme principal a pour limite l'unité, quand μ tend vers l'infini, quelque petit que soit le nombre fixe l : c'est le théorème de Jacques Bernoulli.

Ch. de la Vallée Poussin